

**ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ОЛИМПИАДЫ «ЛОМОНОСОВ» ПО КОСМОНАВТИКЕ 2025**

РАЗМИНКА

КЛАССЫ 5 И 6

Задача 1. *Где впервые был обнаружен химический элемент гелий?*

- A. На Земле*
- B. На Солнце*
- C. На Луне*
- D. На Марсе*
- E. Создан искусственно в лаборатории*

Задача 2. *Какой ученый впервые осуществил и описал мысленный (воображаемый) эксперимент по запуску искусственного спутника Земли?*

- A. Иоганн Кеплер*
- B. Галилео Галилей*
- C. Исаак Ньютон*
- D. Михаил Ломоносов*
- E. Стивен Хоггинг*

Задача 3. *Какую скорость достаточно развить земному космическому аппарату для его полета на Марс?*

- A. Первую космическую*
- B. Вторую космическую*
- C. Третью космическую*
- D. Первую марсианскую*
- E. Любую, но чем больше скорость, тем быстрее долетит*

Задача 4. *Какие страны могут независимо и самостоятельно запускать космонавтов на орбиту?*

- A. Россия и США*
- B. Россия и Китай*

С. Россия, Китай и США

Д. Россия, Китай, США и Европейский союз

Е. Только Украина

Задача 5. В 1986 году была проведена уникальная в практике пилотируемых полетов техническая операция на орбите, которая до настоящего времени не повторена. Какая?

А. С орбитальной станции был запущен спутник

В. В открытый космос вышла женщина-космонавт

С. Установлен рекорд по длительности пребывания человека на орбитальной станции

Д. Осуществлен перелет от одной орбитальной станции к другой и обратно

Е. Орбитальная станция была сведена с орбиты, и утонула в океане

Задача 6. Марс называют «красной планетой», а Землю — «голубой». Почему?

А. Это пошло от древнегреческой мифологии

В. Марс дальше от Солнца, чем Земля, и поэтому до него доходят в основном красные и инфракрасные волны

С. Цвет планетам придает газовый состав атмосферы

Д. Цвет Марсу придают постоянные песчаные бури, а Земле — вода океанов

Е. Это оптическая иллюзия. При взгляде из космоса все планеты имеют одинаковый цвет

Задача 7. Все восемь планет Солнечной системы вращаются в плоскости эклиптики (с небольшими отклонениями). Но только у одной из них ось вращения самой планеты тоже лежит в этой плоскости. У какой?

А. Венера

В. Марс

С. Уран

Д. Нептун

Е. Плутон

Задача 8. Все восемь планет Солнечной системы вращаются вокруг своей оси. Но только у одной из них направление вращения (если смотреть на планету с Солнца) — против часовой стрелки. У какой?

A. Венера

B. Марс

C. Нептун

D. Сатурн

E. Плутон

Задача 9. *Берут ли сейчас в России в космонавты людей высокого роста?*

A. Да, сейчас берут людей любого роста и телосложения

B. Возьмут, если на собеседовании кандидат влезет в скафандр

C. Возьмут, но после специальных тренировок

D. Для космонавта есть ограничение по росту «сидя»

E. Все и как и раньше — космонавт должен быть невысоким, худым и легким

Задача 10. *На поверхности какой планеты Солнечной системы бывает самая высокая температура?*

A. На Меркурии — он ближе всех к Солнцу

B. На Марсе — он красного цвета

C. На Венере — там парниковый эффект

D. На Земле — вода отлично аккумулирует тепло

E. На Луне — этот феномен открыт американцами

ОСНОВНЫЕ ЗАДАНИЯ

КЛАССЫ 5 И 6

Задача 1.

— Время, время, время...
От его возбужденного бормотания
мне стало не по себе.
— Нам нужно больше времени!
Эйлин О'Коннор. 'Патруль'.
Сборник 'Вы признаны опасным'.

В колонию землян на Марсе прилетел новый сотрудник. По прибытии он выставил свои часы по местному времени. Придя на следующее утро на работу к 9:00, он был несколько удивлен тому, что все остальные опоздали примерно на полчаса. На следующее утро в 9 утра он был на работе один - остальные сотрудники стали подтягиваться ближе к 10:00. Объясните произошедшее и предложите план, как добиться того, чтобы путаница со временем больше не повторялась.

Решение: Длина марсианских суток:

$$24 \text{ ч } 37 \text{ мин} = 24 + \frac{37}{60} \approx 24,617 \text{ ч.}$$

Земные часы отсчитывают лишь 24 часа и перешли на новые сутки за этот промежуток. Значит, за одни марсианские сутки часы начинают спешить на

$$24,617 - 24 = 0,617 \text{ ч} \approx 37 \text{ мин.}$$

а вторые сутки спешка увеличивается с 37 до 74 минут. То есть часы станут спешить на 1 час за 14 минуты до окончания суток. Ситуацию можно исправить либо переводя свои часы на 37 минут каждое утро, либо изменением скорости хода часов.

Задача 2.

Я... даже отчасти завидовал Мащенко.
Он-то сейчас дрыхнет в теплой постели.
Эйлин О'Коннор. 'Патруль'.
Сборник 'Вы признаны опасным'.

В космическом корабле есть 10 мест для сна, расположенных в ряд и пронумерованных от 1 до 10. Два космонавта уже лежат в капсулах 3 и 7. Остальным двум нужно выбрать места так, чтобы

- никакие две занятые капсулы не стояли рядом;

- среди пустых капсул не было соседней пары, сумма номеров которой делится на 5 (такая комбинация считается несчастливой, а космонавты очень суеверны!).

Сколькими способами можно выбрать еще 2 места?

Решение: Сначала выпишем капсулы, которые нельзя занимать из-за соседства с уже занятыми 3 и 7:

соседи 3: 2, 4; соседи 7: 6, 8.

Значит, запрещены $\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$. Остаются кандидаты

$\{1, 5, 9, 10\}$.

Дополнительно новые двое не должны сидеть рядом, поэтому пара (9, 10) запрещена. Все остальные пары из множества $\{1, 5, 9, 10\}$ не соседние:

(1, 5), (1, 9), (1, 10), (5, 9), (5, 10).

Теперь проверим второе условие (про пустые соседние капсулы с суммой, кратной 5). Соседние пары — это (1, 2), (2, 3), ..., (9, 10). Их сумма равна $2i + 1$ для пары $(i, i + 1)$. Условие делимости на 5 означает $2i + 1 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow i \equiv 2 \pmod{5}$. В диапазоне $1 \leq i \leq 9$ это даёт только пары (2, 3) и (7, 8). Но капсулы 3 и 7 уже заняты, следовательно эти пары не пустые независимо от нашего выбора. Значит, второе ограничение дополнительных запретов не накладывает.

Итак, годные пары выбора — ровно пять, перечисленные выше.

Ответ: 5 способов.

Задача 3.

— Поверить не могу... — бормотал Диксон.
— Настоящая проселочная дорога!
Эйлин О'Коннор. 'Вы признаны опасным'.
Сборник 'Вы признаны опасным'.

На планете N обитают две расы — наземная и подводная. Проезд между двумя городами, принадлежащими одной и той же расе, бесплатный. Проезд между двумя городами разных рас стоит 25 кредитов (в один конец). Торговец выехал из города A , объехал несколько городов и в результате вернулся в город A . Могло ли случиться так, что он потратил на проезд ровно 2025 кредитов?

Решение: Предположим, город A находится на суше. В процессе переездов торговец пересекал границу между расами $2025 : 25 = 81$ раз. Поскольку это число нечетно, то в результате он должен закончить путь под водой, что противоречит условию.

Задача 4.

— Свиньи были лучше. По крайней мере тише.
— Лучшие всего были грибы, — возразил Роджер.
— Они вообще молчали.
Эйлин О'Коннор. 'Вы признаны опасным'.
Сборник 'Вы признаны опасным'.

Жители планеты Грб обладают способностью к телепатии и регулярно мысленно обмениваются между собой последовательностями цифр. Напишите программу, которая считывает последовательность, периодически ее повторяет и выводит 2025 цифру в последовательности.

Входные данные:

Вначале вводится число N (от 1 до 10) — количество цифр до начала повтора. Затем вводится N цифр через пробел.

Выходные данные:

Одна цифра, которая окажется на 2025 месте.

Пример

Ввод:

6

2 7 5 2 3 2

Вывод: 5

Пояснение. Последовательность имеет вид 2 7 5 2 3 2 2 7 5 2 3 2 2 7 5 2 3 2 и так далее. На 2025 месте окажется цифра 5.

Решение:

```
from math import sqrt
n , m, x, y, r = map(int , input().split() )

out = 0
for house_x in range (n) :
    for house_y in range (m) :
        if ( sqrt((house_x - x)**2 + (house_y - y)**2 ) <= r :
            out += 1
print ( out )
```

Задача 5.

Сизый туман стремительно развеивался над болотом.
Врач бежал, единственным известным ему коротким путем:
через трясину.
Эйлин О'Коннор. 'Чани'.
Сборник 'Вы признаны опасным'.

Согласно снимкам местности, полученным из космоса, из-за перемен погоды площадь участка сухой земли менялась следующим образом:

После первой недели — уменьшилась на 20% от начальной.

После второй недели — увеличилась на 15% от предыдущего значения.
 После третьей недели — уменьшилась на 10% от предыдущего значения.
 После четвертой недели — увеличилась на 5% от предыдущего значения.
 Как по итогам месяца изменилась площадь участка сухой земли? Увеличилась или уменьшилась? На сколько процентов? На листе бумаги в клетку сделайте чертеж, соответствующий условиям задачи.

Решение: Итоговая площадь $S' = 0,8 \cdot 1,15 \cdot 0,9 \cdot 1,05 \cdot S$ по сравнению с начальной. Итого, $S' = 0,8694S$, т.е. площадь уменьшилась на 13,06%.

Задача 6.

*Бункер его ошеломил.
 Это было прекрасно замаскированное сооружение,
 рассчитанное человек на двести.
 Эйлин О'Коннор. 'День святого Патрика'.
 Сборник 'Вы признаны опасным'.*

Чертеж проекта станции на Марсе имеет форму многоугольника, разделенного на 15 одинаковых квадратов (каждый квадрат — отдельное помещение). В каждом помещении, одной из сторон которой является часть внешней стены станции, расположен ровно один иллюминатор. Каждые два соседних помещения соединены ровно одним люком для прохода. Сколько на такой станции может быть люков? Сколько иллюминаторов? Для каждого своего варианта станции сделайте чертеж на бумаге в клетку.

Решение: Расположив квадраты цепочкой, получим, что каждый из них имеет внешние стороны, т.е. получим 15 иллюминаторов. Возьмем прямоугольник 4×4 квадрата и удалим любой его угловой квадрат — получим многоугольник, у которого ровно четыре квадрата являются внутренними (не имеют общих точек с внешней стенкой многоугольника), т.е. получим 11 иллюминаторов. На самом деле, меньшее число иллюминаторов получить нельзя. Любое число от 11 до 15 получить можно.

Посчитаем возможное число люков. Если расположить квадраты цепочкой, то число внутренних стен равно 14 — получаем 14 люков. Если расположить 4 квадрата в цепочку, следующие 4 расположить во вторую цепочку и пристыковать ее к первой боковой стенкой, сдвинув на $1/2$ квадрата, то получим 13 люков. Если составить аналогичным образом еще две цепочки — из 4 и из 3 квадратов, стыкую их тоже со сдвигом на $1/2$ квадрата, то получим еще 11 люков. Если теперь состыковать эти пары цепочек тоже со сдвигом на $1/2$ квадрата, то получим еще 7 люков — итого 31 люк. Большее числа авторам получить не удалось. Любое промежуточное число от 14 до 31 люков получить можно.

РАЗМИНКА

КЛАССЫ 7 И 8

Полностью совпадает с разминкой для 5 и 6 классов.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАНИЯ

КЛАССЫ 7 И 8

Задача 1.

*Но сегодняшний день стал исключением.
Все они собрались за круглым столом:
солдаты, техники, капитан, радист, биолог
и он сам — врач пассажирского флота.
Эйлин О'Коннор. 'Чани'.
Сборник 'Вы признаны опасным'.*

На столе лежала 21 карточка. На карточках были написаны натуральные числа от 1 до 21 (по одному числу на каждой карточке). Из этих карточек выбрали некоторые 12. Сначала выбранные карточки разложили на три кучки так, чтобы все числа на карточках в одной кучке имели один и тот же остаток от деления на 3. Оказалось, что в каждой кучке одинаковое количество карточек. Потом выбранные карточки разложили на кучки так, чтобы все числа на карточках в одной кучке имели один и тот же остаток от деления на 4. Кучек снова оказалось три, причем в одной из них оказалось шесть карточек, в другой — пять и в третьей — одна. Какие числа были написаны на выбранных карточках, если известно, что среди них точно были числа 6 и 7?

Ответ: 1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21.

Решение. Первое условие дает нам, что среди 12 выбранных чисел ровно четыре делятся на 3 нацело, четыре имеют остаток 1 при делении на 3 и еще четыре имеют остаток 2 при делении на 3. Распределим по этому признаку (остаток от деления на 3) все числа от 1 до 21. В первую группу (остаток равен 1) попадут числа 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19. Во вторую (остаток равен 2) — числа 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20. В третью (делятся нацело) — числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21. Итак, из каждой группы выбрано по четыре числа.

Посмотрим, какие остатки дают числа от 1 до 21 при делении на 4. Остаток 1 дают шесть чисел: 1, 5, 9, 13, 17, 21. Остаток 2 дают пять чисел: 2, 6, 10, 14, 18. Остаток 3 дают пять чисел: 3, 7, 11, 15, 19. Нацело на 4 делятся тоже пять чисел: 4, 8, 12, 16, 20. По условию, в одной из кучек с одинаковым остатком при делении на 4 оказалось шесть карточек. Значит, точно были выбраны числа 1, 5, 9, 13, 17, 21 (при делении на 4 дают остаток 1). Заметим, что из них два попали в первую группу при делении на 3, два во вторую и два в третью. Значит, из каждой группы нужно выбрать еще по два.

По условию точно выбраны числа 6 и 7. При делении на 4 первое из этих чисел дает остаток 2, второе — остаток 3. Значит, ни одно из чисел, которые нацело делятся на 4, выбрано не было (при делении на 4 получилось по условию всего три кучки). Предположим, что число 7 попало при делении на 4 в ту кучку, где лежит пять карточек. Тогда точно должны быть выбраны числа 3, 7, 11, 15, 19. Получаем, что пять из выбранных чисел делятся на 3: это числа 3, 6, 9, 15, 21. Но это противоречит первому условию задачи. Значит, число 7 попало в кучку, где лежит одна карточка, а в кучку с пятью попали числа 2, 6, 10, 14, 18. Итак, был выбран набор 1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, он удовлетворяет всем условиям задачи.

Задача 2.

*Он увидел поселение, располагающееся на высоком берегу —
такое же, как и его собственное,
но с крепким частоколом и даже сторожевой башней.
Эйлин О'Коннор. 'День святого Патрика'.
Сборник 'Вы признаны опасным'.*

Город на плоскости имеет планировку в виде прямоугольника с левым нижним углом в точке $(0, 0)$ и правым верхним в точке (n, m) , где n, m — целые неотрицательные числа. В каждой целочисленной точке (в том числе на границе) этого прямоугольника находится дом. Солнечный парус, развернутый на орбите, освещает поверхность земли пятном в форме круга радиуса R — целое неотрицательное число. Напишите программу, которая вычисляет количество домов, которые попадут в пятно засветки солнечного паруса (считая и дома, попавшие на границу), если центр пятна находится в точке с координатами (x, y) — два целых числа.

Входные данные:

Целые числа m, n, x, y, R (центр пятна не обязательно лежит внутри прямоугольника).

Выходные данные:

Целое число — количество освещенных домов.

Пример

Ввод: 2 3 -1 2 2

Вывод: 4

Пояснение. В освещенное пятно попадают дома $(0, 1)$; $(0, 2)$ и $(0, 3)$. На границе лежит дом $(1, 2)$. Итого, 4 дома.

Решение:

```
from math import sqrt
n, m, x, y, r = map(int, input().split())

out = 0
for house_x in range(n):
    for house_y in range(m):
```

```

if ( sqrt((house_x - x)**2 + (house_y - y)**2 ) <= r :
    out += 1
print ( out )

```

Задача 3.

*Патрик одним взглядом охватил... металлический шар,
наискось режущий волну. Он был похож на луну.
Эйлин О'Коннор. 'День святого Патрика'.
Сборник 'Вы признаны опасным'.*

Космический аппарат летит от Земли к Луне. Расстояние между Землей и Луной — 384 000 км. Аппарат движется так, что скорость в середине времени полета в два раза меньше, чем в начале: $v(T/2) = \frac{1}{2}v_0$. Предположим, что $v(t)$ убывает линейно на интервале $[0, T]$. Сколько километров аппарат пролетит за первую половину времени?

Решение: Линейность $v(t)$ задает

$$v(t) = v_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) \iff v\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{v_0 + v(T)}{2} = \frac{v_0}{2} \Rightarrow v(T) = 0,$$

то есть график $v(t)$ — отрезок от $(0, v_0)$ до $(T, 0)$.

Пройденный путь равен площади под графиком скорости:

$$S = \int_0^T v(t) dt, \quad S_1 = \int_0^{T/2} v(t) dt.$$

При линейном $v(t)$ это площади *треугольника* и *трапеции* (см. рисунок):

$$S = \frac{v_0 \cdot T}{2}, \quad S_1 = \frac{(v_0 + \frac{v_0}{2})}{2} \cdot \frac{T}{2} = \frac{3}{8}v_0T.$$

Отсюда отношение не зависит от v_0 и T :

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\frac{3}{8}v_0T}{\frac{1}{2}v_0T} = \frac{3}{4}.$$

Итак, за первую половину времени аппарат проходит $\frac{3}{4}$ всего пути:

$$S_1 = \frac{3}{4} \cdot 384\,000 = 288\,000$$

Ответ: 288 000 км.

Задача 4.

— Время, время, время...
От его возбужденного бормотания
мне стало не по себе.
— Нам нужно больше времени!
Эйлин О'Коннор. 'Патруль'.
Сборник 'Вы признаны опасным'.

В колонию землян на Марсе прилетел новый сотрудник. По прибытии он выставил свои часы по местному времени. Придя на следующее утро на работу к 9:00, он был несколько удивлен тому, что все остальные опоздали примерно на полчаса. На следующее утро в 9 утра он был на работе один - остальные сотрудники стали подтягиваться ближе к 10:00. Объясните произошедшее и предложите план, как добиться того, чтобы путаница со временем больше не повторялась.

Решение: Длина марсианских суток:

$$24 \text{ ч } 37 \text{ мин} = 24 + \frac{37}{60} \approx 24,617 \text{ ч.}$$

Земные часы отсчитывают лишь 24 часа и перешли на новые сутки за этот промежуток. Значит, за одни марсианские сутки часы начинают спешить на

$$24,617 - 24 = 0,617 \text{ ч} \approx 37 \text{ мин.}$$

а вторые сутки спешка увеличивается с 37 до 74 минут. То есть часы станут спешить на 1 час за 14 минут до окончания суток. Ситуацию можно исправить либо переводя свои часы на 37 минут каждое утро, либо изменением скорости хода часов.

Задача 5.

Я... даже отчасти завидовал Мащенко.
Он-то сейчас дрыхнет в теплой постели.
Эйлин О'Коннор. 'Патруль'.
Сборник 'Вы признаны опасным'.

В космическом корабле есть 10 мест для сна, расположенных в ряд и пронумерованных от 1 до 10. Два космонавта уже лежат в капсулах 3 и 7. Остальным двум нужно выбрать места так, чтобы

- никакие две занятые капсулы не стояли рядом;
- среди пустых капсул не было соседней пары, сумма номеров которой делится на 5 (такая комбинация считается несчастливой, а космонавты очень суеверны!).

Сколькими способами можно выбрать еще 2 места?

Решение: Сначала выпишем капсулы, которые нельзя занимать из-за соседства с уже занятыми 3 и 7:

$$\text{соседи 3: } 2, 4; \quad \text{соседи 7: } 6, 8.$$

Значит, запрещены $\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$. Остаются кандидаты

$$\{1, 5, 9, 10\}.$$

Дополнительно новые двое не должны сидеть рядом, поэтому пара $(9, 10)$ запрещена. Все остальные пары из множества $\{1, 5, 9, 10\}$ не соседние:

$$(1, 5), (1, 9), (1, 10), (5, 9), (5, 10).$$

Теперь проверим второе условие (про пустые соседние капсулы с суммой, кратной 5). Соседние пары — это $(1, 2), (2, 3), \dots, (9, 10)$. Их сумма равна $2i + 1$ для пары $(i, i + 1)$. Условие делимости на 5 означает $2i + 1 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow i \equiv 2 \pmod{5}$. В диапазоне $1 \leq i \leq 9$ это даёт только пары $(2, 3)$ и $(7, 8)$. Но капсулы 3 и 7 уже заняты, следовательно эти пары *не пустые* независимо от нашего выбора. Значит, второе ограничение дополнительных запретов не накладывает.

Итак, годные пары выбора — ровно пять, перечисленные выше.

Ответ: 5 способов.

Задача 6.

*Однако внутри сложноустроенного организма андроида
включился сигнал, оповещающий о произошедшем.*

Эйлин О'Коннор. 'День святого Патрика'.

Сборник 'Вы признаны опасным'.

На Марсе находится марсоход. Центр управления полетом дал команду марсоходу начать движение. Получив ответ марсохода о начале движения, ЦУП выждал 2 минуты, а затем передал команду движение остановить. Какое расстояние может проехать марсоход, если его скорость равна 6 метров в минуту? Временем на обработку сигнала можно пренебречь — считайте, что сигнал распространяется со скоростью света.

Решение: Пусть время движения света от ЦУП до Марса равно T . Выберем точку отсчета времени момент, когда ЦУП выслал команду марсоходу начать движение. Тогда марсоход начал движение в момент времени T . ЦУП получил ответ марсохода в момент $2T$ и передал команду остановиться в момент $2T + 2$. Марсоход получил эту команду в момент $3T + 2$, т.е. продолжительность его движения равна $2T + 2$ (в минутах). Пройденный путь тогда равен $12(1 + T)$ метров.

Теперь найдем расстояние между Землей и Марсом. Орбиту Земли можно считать круговой с радиусом $R_3 = 150 \cdot 10^6$ км, а орбита Марса является достаточно вытянутым эллипсом, так что R_M меняется от $207 \cdot 10^6$ до $249 \cdot 10^6$ км. Тогда минимально возможное расстояние между планетами равно $d_{\min} = 57 \cdot 10^6$ км, а максимальное $d_{\max} = 399 \cdot 10^6$ км. Скорость света равна $c = 300 \cdot 10^3$ км/с, т.е. $T \in [T_{\min}, T_{\max}]$, где $T_{\min} = d_{\min}/c \approx 190$ с, а $T_{\max} = d_{\max}/c \approx 1330$ с. Переводя в минуты, получаем, что T лежит между 3, 15 и 22, 19.

Ответ: от 50 до 278 м.

РАЗМИНКА

КЛАССЫ 9 И 10

Задача 1. *Обитатели полярной станции, расположенной на Северном полюсе наблюдают за восходом Солнца. Сколько времени они будут его наблюдать (от появления над горизонтом верхней точки до появления всего диска)?*

- А. Примерно пять минут*
- В. Около одного часа*
- С. Примерно сутки***
- Д. Почти трое суток*
- Е. Они не смогут его наблюдать — на Северном полюсе всегда темно и холодно*

Задача 2. *Какой ученый впервые осуществил и описал мысленный (воображаемый) эксперимент по запуску искусственного спутника Земли?*

- А. Иоганн Кеплер*
- В. Галилео Галилей*
- С. Исаак Ньютон***
- Д. Михаил Ломоносов*
- Е. Стивен Хогкинз*

Задача 3. *Какую космическую скорость достаточно развить земному космическому аппарату для его полета на Марс?*

- А. Первую космическую*
- В. Вторую космическую*
- С. Третью космическую***
- Д. Первую марсианскую*
- Е. Любую, но чем больше скорость, тем быстрее долетит*

Задача 4. *Какие страны могут независимо и самостоятельно запускать космонавтов на орбиту?*

- А. Россия и США*
- В. Россия и Китай*
- С. Россия, Китай и США***

D. Россия, Китай, США и Европейский союз

E. Украина

Задача 5. *Можно ли запустить космический аппарат так чтобы он, двигаясь по орбите был неподвижен (находился бы в одной и той же точке небесной сферы) для наблюдателя, находящегося в Москве?*

A. Нет

B. Можно если космический корабль запущен на орбиту Земли вокруг Солнца

C. Можно, если запустить корабль на геостационарную орбиту Земли

D. Можно, если запустить корабль в одну из точек либрации (точку Лагранжа) системы Солнце — Земля

E. Можно, но наблюдателю придется постоянно перемещаться по Москве

Задача 6. *В 1986 году была проведена уникальная в практике пилотируемых полетов техническая операция на орбите, которая до настоящего времени не повторена. Какая?*

A. С орбитальной станции был запущен спутник

B. В открытый космос вышла женщина-космонавт

C. Установлен рекорд по длительности пребывания человека на орбитальной станции

D. Осуществлен перелет от одной орбитальной станции к другой и обратно

E. Орбитальная станция была сведена с орбиты, и утонула в океане

Задача 7. *Реактивные двигатели на космических аппаратах работают довольно редко, а некоторые космические аппараты не имеют реактивных двигателей вовсе. Почему же тогда космические аппараты летают по орбите годами?*

A. На самом деле, все «долго живущие» на орбите космические аппараты оснащены двигателями и регулярно их включают

B. Для поддержания орбиты космические аппараты используют энергию солнечного ветра

C. Для поддержания орбиты космические аппараты используют неоднородности гравитационного поля Земли

D. На достаточно высокой орбите нет сопротивления среды, так что никаких сил для поддержания орбиты прикладывать не нужно

E. Аппараты на орбите поддерживает атмосфера Земли

Задача 8. *Марс называют «красной планетой», а Землю — «голубой». Почему?*

- A. Это пошло от древнегреческой мифологии*
- B. Марс дальше от Солнца, чем Земля, и поэтому до него доходят в основном красные и инфракрасные волны*
- C. Цвет планетам придает газовый состав атмосферы*
- D. Цвет Марсу придают постоянные песчаные бури, а Земле — вода океанов*
- E. Это оптическая иллюзия. При взгляде из космоса все планеты имеют одинаковый цвет*

Задача 9. *Сколько восходов Солнца можно наблюдать с борта современного самолета при беспосадочном перелете из Петропавловска–Камчатского в Москву, двигаясь вдоль параллели на запад с постоянной скоростью?*

- A. Не более одного*
- B. Не менее одного*
- C. Всегда ровно один*
- D. До двух восходов, но не более*
- E. Сколько угодно*

Задача 10. *Берут ли сейчас в России в космонавты людей высокого роста?*

- A. Да, сейчас берут людей любого роста и телосложения*
- B. Возьмут, если кандидат влезет в скафандр*
- C. Возьмут, но после специальных тренировок*
- D. Для космонавта есть ограничение по росту «сидя»*
- E. Все и как и раньше — космонавт должен быть невысоким, худым и легким*

ОСНОВНЫЕ ЗАДАНИЯ

КЛАССЫ 9 И 10

Задача 1.

*Но сегодняшний день стал исключением.
Все они собрались за круглым столом:
солдаты, техники, капитан, радист, биолог
и он сам — врач пассажирского флота.
Эйлин О'Коннор. 'Чани'.
Сборник 'Вы признаны опасным'.*

На столе лежала 21 карточка. На карточках были написаны натуральные числа от 1 до 21 (по одному числу на каждой карточке). Из этих карточек выбрали некоторые 12. Сначала выбранные карточки разложили на три кучки так, чтобы все числа на карточках в одной кучке имели один и тот же остаток от деления на 3. Оказалось, что в каждой кучке одинаковое количество карточек. Потом выбранные карточки разложили на кучки так, чтобы все числа на карточках в одной кучке имели один и тот же остаток от деления на 4. Кучек снова оказалось три, причем в одной из них оказалось шесть карточек, в другой — пять и в третьей — одна. Какие числа были написаны на выбранных карточках, если известно, что среди них точно были числа 6 и 7?

Ответ: 1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21.

Решение. Первое условие дает нам, что среди 12 выбранных чисел ровно четыре делятся на 3 нацело, четыре имеют остаток 1 при делении на 3 и еще четыре имеют остаток 2 при делении на 3. Распределим по этому признаку (остаток от деления на 3) все числа от 1 до 21. В первую группу (остаток равен 1) попадут числа 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19. Во вторую (остаток равен 2) — числа 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20. В третью (делятся нацело) — числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21. Итак, из каждой группы выбрано по четыре числа.

Посмотрим, какие остатки дают числа от 1 до 21 при делении на 4. Остаток 1 дают шесть чисел: 1, 5, 9, 13, 17, 21. Остаток 2 дают пять чисел: 2, 6, 10, 14, 18. Остаток 3 дают пять чисел: 3, 7, 11, 15, 19. Нацело на 4 делятся тоже пять чисел: 4, 8, 12, 16, 20. По условию, в одной из кучек с одинаковым остатком при делении на 4 оказалось шесть карточек. Значит, точно были выбраны числа 1, 5, 9, 13, 17, 21 (при делении на 4 дают остаток 1). Заметим, что из них два попали в первую группу при делении на 3, два во вторую и два в третью. Значит, из каждой группы нужно выбрать еще по два.

По условию точно выбраны числа 6 и 7. При делении на 4 первое из этих чисел дает остаток 2, второе — остаток 3. Значит, ни одно из чисел, которые нацело делятся на 4, выбрано не было (при делении на 4 получилось по условию всего три кучки). Предположим, что число 7 попало при делении на 4 в ту кучку, где лежит пять карточек. Тогда точно должны быть выбраны числа 3, 7, 11, 15, 19. Получаем, что пять из выбранных чисел делятся на 3: это числа 3, 6, 9, 15, 21. Но это противоречит первому условию задачи. Значит, число 7 попало в кучку, где лежит одна карточка, а в кучку с пятью попали числа

2, 6, 10, 14, 18. Итак, был выбран набор 1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, он удовлетворяет всем условиям задачи.

Задача 2.

И помни: не знаешь, как поступить — погладь кота.

Эйлин О'Коннор. 'Хранители'.

Сборник 'Вы признаны опасным'.

Пусть $f(x) = \frac{x^3}{x^3 - (x-1)^3}$. Вычислите сумму $f(1/2025) + f(2/2025) + \dots + f(2024/2025)$.

Решение. Заметим, что $f(x) = \frac{x^3}{x^3 + (1-x)^3}$, а $f(1-x) = \frac{(1-x)^3}{x^3 + (1-x)^3}$. Тогда $f(x) + f(1-x) = 1$. Остается разбить наши слагаемые на пары — их будет $2024/2 = 1012$.

Ответ: 1012.

Задача 3.

*Я подозревал, что это оборотень в терминальной стадии,
причем из старых, потому что давным-давно
уже не обязательно чертить на земле обрядовые символы,
чтобы перекинуться в человека.*

Эйлин О'Коннор. 'Патруль'.

Сборник 'Вы признаны опасным'.

В правильном пятиугольнике $ABCDE$ провели диагонали AC , BD , CE , DA и EB , которые своими точками пересечения образовали внутри новый пятиугольник $KLMNP$. Найдите отношение радиуса окружности, описанной около $KLMNP$ к радиусу окружности, описанной около исходного пятиугольника $ABCDE$.

Решение. Пятиугольники $ABCDE$ и $KLMNP$ подобны, так что остается найти коэффициент подобия. Пусть $K = AD \cap BE$, $L = AC \cap BE$, $M = AC \cap BD$, $N = BD \cap CE$, $P = CE \cap AD$. Обозначим сторону исходного пятиугольника через x , а длину диагонали через y . Внутренний угол в пятиугольнике равен 108° , а тогда диагонали разбивают каждый такой угол на три равных угла по 36° . Запишем две теоремы косинусов:

$$y^2 + y^2 - 2y^2 \cos 36^\circ = x^2, \quad (ky)^2 + (ky)^2 - 2(ky)^2 \cos 108^\circ = x^2.$$

Разделив одно на другое, получаем коэффициент подобия $k^2 = \frac{1 - \cos 36^\circ}{1 - \cos 108^\circ}$, откуда $k = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Задача 4.

*Он увидел поселение, располагающееся на высоком берегу —
такое же, как и его собственное,
но с крепким частоколом и даже сторожевой башней.*

Эйлин О'Коннор. 'День святого Патрика'.

Сборник 'Вы признаны опасным'.

Город на плоскости имеет планировку в виде прямоугольника с левым нижним углом в точке $(0,0)$ и правым верхним в точке (n,m) , где n, m — целые неотрицательные числа. В каждой целочисленной точке (в том числе на границе) этого прямоугольника находится дом. Солнечный парус, развернутый на орбите, освещает поверхность земли пятном в форме круга радиуса R — целое неотрицательное число. Напишите программу, которая вычисляет количество домов, которые попадут в пятно засветки солнечного паруса (считая и дома, попавшие на границу), если центр пятна находится в точке с координатами (x,y) — два целых числа.

Входные данные:

Целые числа m, n, x, y, R (центр пятна не обязательно лежит внутри прямоугольника).

Выходные данные:

Целое число — количество освещенных домов.

Пример

Ввод: 2 3 -1 2 2

Вывод: 4

Пояснение. В освещенное пятно попадают дома $(0,1)$; $(0,2)$ и $(0,3)$. На границе лежит дом $(1,2)$. Итого, 4 дома.

Решение:

```
from math import sqrt
n, m, x, y, r = map(int, input().split())

out = 0
for house_x in range(n):
    for house_y in range(m):
        if (sqrt((house_x - x)**2 + (house_y - y)**2) <= r):
            out += 1
print(out)
```

Задача 5.

Трое аборигенов по-прежнему стояли неподвижно
и смотрели на него.

Толстые, низкорослые, пушистые.

Эйлин О'Коннор. 'Чани'.

Сборник 'Вы признаны опасным'.

Исследуется численность аборигенной популяции Чани на планете. Ученые предложили следующую модель, описывающую рост численности популяции по месяцам с учетом внутривидовой конкуренции: если в текущем месяце число особей равно N , то на следующий месяц: — если текущее число особей N меньше K , то на следующий месяц количество особей в популяции будет равно числу, в R раз большему N ; — если число особей в популяции в данном месяце N больше или равно K , то на следующий месяц

особей будет в R раз больше корня из текущей численности N (с учетом округления вниз нецелых значений).

Напишите программу на языке программирования (*Pascal, C++, Python, Haskell* и т.д.), которая будет принимать на вход значения R, K , значение начального количества особей в популяции n и значение M , и будет определять, может ли численность популяции в некотором месяце в течение двух лет от текущей даты стать больше либо равной значения M и выводить “NO” или “YES” в зависимости от ответа. Если такое условие выполняется, то через пробел после “YES” программа должна вывести количество времени в месяцах, которое пройдет до наступления такого события впервые. Если в ходе расчета следующее значение численности N становится меньше 0, то считается, что вид вымирает и в дальнейшем число особей в популяции всегда равно 0.

Ограничения на входные параметры: $R \geq 2, K \geq 1, n \geq 2, 1 \leq M \leq 1000$, все числа целые.

Задача 6.

Кто-то наверняка решил, что спутник
для постоянного наблюдения за соседней Юноной,
где давно строила флот недружественная людям
раса ошей, обойдется слишком дорого.
Эйлин О’Коннор. ‘Чани’.
Сборник ‘Вы признаны опасным’.

Спутник выведен на круговую экваториальную орбиту вокруг Земли на высоте $h = 44000$ км и ведет наблюдение за Солнцем. Определите, какую часть орбитального периода он сможет получать изображения:

- 1) только части солнечного диска;
- 2) всего солнечного диска целиком.

Решение: Спутник не может вести наблюдения в течении всего времени, так как часть периода он будет находиться в тени и полутени Земли. Найдем точку Р, где тень от Земли выражается в точку. Из подобия треугольников:

$$\frac{R_{\oplus}}{x + h + R_{\oplus}} = \frac{R_{\odot}}{x + h + a + R_{\oplus}} = \frac{r}{x},$$

Где r — радиус тени на орбите спутника

$$\begin{aligned} R_{\oplus}x + R_{\oplus}(h + a + R_{\oplus}) &= R_{\odot}x + R_{\odot}(h + R_{\oplus}) \\ \Downarrow \\ x &= \frac{R_{\odot}(h + R_{\oplus}) - R_{\oplus}(h + a + R_{\oplus})}{R_{\oplus} - R_{\odot}} \approx 1,4 \cdot 10^6 \text{ км} \end{aligned}$$

Теперь найдем радиус тени Земли на орбите спутника:

$$r = \frac{R_{\oplus}x}{x + h + R_{\oplus}} \approx 6200 \text{ км}$$

Определим время, за которое спутник пролетает данное расстояние. Так как участок менее 15° , будем считать рассматриваемый участок траектории прямолинейным.

Таким образом, искомая доля периода:

$$\alpha = \frac{2r}{2\pi(R_{\oplus} + h)} \approx 0.039$$

Теперь проведем аналогичные рассуждения для полутени. Аналогично, из подобия треугольников

$$\begin{aligned} \frac{R_{\oplus}}{y} &= \frac{R_{\odot}}{a - y} = \frac{r'}{h + y + R_{\oplus}} \\ &\Downarrow \\ R_{\oplus}(a - y) &= R_{\odot}y \\ y &= \frac{R_{\oplus}a}{R_{\oplus} + R_{\odot}} \approx 1,4 \cdot 10^6 \text{ км} \end{aligned}$$

Теперь найдем радиус полутени Земли на орбите спутника:

$$r' = \frac{R_{\oplus}(h + y + R_{\oplus})}{y} \approx 6630 \text{ км}$$

Таким образом, искомая доля периода:

$$\alpha' = \frac{2r'}{2\pi(R_{\oplus} + h)} \approx 0.042$$

Ответ: $\alpha \approx 0.039$, $\alpha' \approx 0.042$

Задача 7.

— Сеансы психоанализа за другой дверью! — отрезал Кот.
— А у меня либо горькая истина, либо неприглядная правда,
либо душераздирающие факты. Выбирайте!
Эйлин О'Коннор. 'У Лукоморья дуб зеленый'.
Сборник 'Вы признаны опасным'.

Центры Земли и Солнца лежат на одной прямой и разделены расстоянием $D = 1,5 \cdot 10^8$ км; их массы равны $M_{\oplus} = 6 \cdot 10^{24}$ кг и $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ кг. На соединяющем их отрезке расположен малый аппарат (его массой пренебречь). Пренебрегая притяжением прочих тел и вращением системы, найдите расстояние r от центра Земли до точки на отрезке Земля — Солнце, где модули гравитационных сил притяжения Земли и Солнца равны. Проверьте найденную точку на устойчивость/неустойчивость при малых продольных смещениях вдоль линии Земля — Солнце.

Решение: Гравитационные ускорения:

$$a_{\oplus} = \frac{GM_{\oplus}}{r^2}, \quad a_{\odot} = \frac{GM_{\odot}}{(D-r)^2}.$$

Условие равенства:

$$\frac{GM_{\oplus}}{r^2} = \frac{GM_{\odot}}{(D-r)^2}.$$

Сокращая G , получаем

$$\frac{M_{\oplus}}{r^2} = \frac{M_{\odot}}{(D-r)^2} \Rightarrow \frac{r}{D-r} = \sqrt{\frac{M_{\oplus}}{M_{\odot}}}.$$

Отсюда

$$r = \frac{D}{1 + \sqrt{M_{\odot}/M_{\oplus}}}.$$
$$\Downarrow$$
$$r' = D - r \approx 2,6 \cdot 10^5 \text{ км}$$

Рассмотрим устойчивость. При смещении аппарата к Солнцу его сила притяжения растёт, а земная уменьшается — аппарат тянет дальше к Солнцу. При смещении к Земле действует аналогично. Значит, равновесие *неустойчивое*.

Ответ: $2,6 \cdot 10^5$ км от центра Земли, равновесие неустойчивое.

Задача 8.

*Патрик одним взглядом охватил... металлический шар,
наискось режущий волну. Он был похож на луну.
Эйлин О'Коннор. 'День святого Патрика'.
Сборник 'Вы признаны опасным'.*

Космический аппарат летит от Земли к Луне по эллиптической траектории. Расстояние между Землей и Луной — 384 000 км. Аппарат движется так, что скорость в середине времени полета в два раза меньше, чем в начале: $v(T/2) = \frac{1}{2}v_0$. Предположим, что $v(t)$ убывает линейно на интервале $[0, T]$. Сколько километров аппарат пролетит за первую половину времени, если весь перелет занимает $T = 5$ дней?

Решение: Линейность $v(t)$ задаёт

$$v(t) = v_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) \iff v\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{v_0 + v(T)}{2} = \frac{v_0}{2} \Rightarrow v(T) = 0,$$

то есть график $v(t)$ — отрезок от $(0, v_0)$ до $(T, 0)$.

Пройденный путь равен площади под графиком скорости:

$$S = \int_0^T v(t) dt, \quad S_1 = \int_0^{T/2} v(t) dt.$$

При линейном $v(t)$ это площади *треугольника* и *трапеции* (см. рисунок):

$$S = \frac{v_0 \cdot T}{2}, \quad S_1 = \frac{(v_0 + \frac{v_0}{2})}{2} \cdot \frac{T}{2} = \frac{3}{8}v_0T.$$

Отсюда отношение не зависит от v_0 и T :

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\frac{3}{8}v_0T}{\frac{1}{2}v_0T} = \frac{3}{4}.$$

Итак, за первую половину времени аппарат проходит $\frac{3}{4}$ всего пути:

$$S_1 = \frac{3}{4} \cdot 384\,000 = 288\,000$$

Ответ: 288 000 км.

РАЗМИНКА

11 КЛАСС

Полностью повторяет разминку для 9 — 10 классов

ОСНОВНЫЕ ЗАДАНИЯ

11 КЛАСС

Задача 1.

*У людей умных голова напоминает ящик комода:
выдвинь его, вложи в него мысль, закрой,
и она будет храниться там до скончания века.
Эйлин О'Коннор. 'День святого Патрика'.
Сборник 'Вы признаны опасным'.*

Известно, что функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$ и для любых действительных x удовлетворяет уравнению

$$20 \cdot f(25x) = f(x) + x^2.$$

Найдите наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$f(x) > x.$$

Решение. Покажем, что решение функционального уравнения единственно. Действительно, если уравнению удовлетворяют две функции f и g , то их разность $h(x) := f(x) - g(x)$ удовлетворяет уравнению

$$20h(24x) = h(x) \Leftrightarrow h(24x) = \frac{1}{20}h(x).$$

Если h не тождественно нулевая функция, то существует такая точка x_0 , что $h(x_0) \neq 0$. Тогда

$$h(x_0) = h\left(24 \frac{x_0}{24}\right) = \frac{1}{20}h\left(\frac{x_0}{24}\right) = \dots = \frac{1}{20^k}h\left(\frac{x_0}{24^k}\right) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $h(x_0) = 0$ и $h \equiv 0$.

Найдем решение функционального уравнения в виде $f(x) = ax^2$:

$$20 \cdot a \cdot (24x)^2 = ax^2 + x^2 \Leftrightarrow 11\,519ax^2 = x^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{11\,519}.$$

Решением неравенства

$$\frac{x^2}{11\,519} > x$$

является множество $(-\infty; 0) \cup (11\,519; +\infty)$.

Ответ: 11 520

Задача 2.

*Маленькая планета была форпостом империи,
ее сторожевой вышкой.
Эйлин О'Коннор. 'Чани'.
Сборник 'Вы признаны опасным'.*

На сферическую планету, лишенную атмосферы, упали два метеорита. Считая, что метеорит может попасть равновероятно в любую точку планеты, а также, что метеориты летели независимо друг от друга, найдите вероятность того, что расстояние (по поверхности планеты) между точками падения меньше радиуса планеты.

Решение. Расстояние равно дуге большого круга $L = R\alpha \leq R$, т.е. $\alpha \leq 1$ (радиан). Телесный угол при вершине конуса равен $\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$, т.е. площадь части сферы, определяемой условием «расстояние точки падения второго метеорита до точки падения первого (при условии, что точка падения первого фиксирована)» равна $S = \Omega R^2$. Общая площадь поверхности сферы равна $4\pi R^2$, а поскольку все точки падения считаются равновероятными, то искомая вероятность равна $p = \frac{S}{4\pi R^2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \approx 0,23$.

Ответ: $p \approx 0,23$.

Задача 3.

*— В окрестностях Чепстоу обнаружен корабль.
На него наткнулись по чистой случайности.
Он глубоко ушел в болото.
Эйлин О'Коннор. 'Ссылки на крупную птицу'.
Сборник 'Вы признаны опасным'.*

12 апреля 1961 года Юрий Гагарин совершил первый в мире космический полет продолжительностью 108 минут. Отделение космического корабля от ракеты-носителя произошло на 2,5 секунды позже расчетного, из-за чего корабль получил дополнительную скорость +25,43 м/с и не смог выйти на расчетную орбиту (перигей 180 км, апогей 235 км). На сколько из-за этого увеличился апогей орбиты?

Решение. По имеющимся в задаче данным нельзя дать однозначный ответ — режим вывода на орбиту аппарата не задан. Однако логично предположить, что в конце запланированного вывода на орбиту аппарат был развернут маршевыми двигателями по касательной к запланированной орбите. Далее, время дополнительной работы двигателя 2,5 секунды достаточно мало, так что можно считать, что спутник получил мгновенный тангенсальный импульс, который увеличил модуль его скорости на 23,45 м/с. Запланированная орбита была эллиптической.

Разберем два предельных случая. При тангенсальном импульсе в перигее орбиты величина перигея не меняется, но меняется апогей. Изменение апогея найдем из закона сохранения энергии. Полная энергия равна сумме кинетической $mv^2/2$ и потенциальной

$-m\mu/r$, где m — масса спутника, μ — гравитационный параметр (для Земли он равен $4 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$), r — расстояние от точки орбиты до центра Земли. Значение полной энергии равно

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{m\mu}{r} = -\frac{m\mu}{2a},$$

где a — величина большой полуоси эллипса орбиты. В нашем случае $a = R_3 + \frac{h_p + h_a}{2} = 6,5784 \cdot 10^6 \text{ м}$, где $h_p = 180 \cdot 10^3$ — высота перигея, $h_a = 235 \cdot 10^3$ — высота апогея, $R_3 = 6371 \cdot 10^6 \text{ м}$ — средний радиус Земли. Подставляем сюда наши значения и получаем скорость в перигее перед импульсом $v_p \approx 7815 \text{ м/с}$. Тогда после импульса она останется направленной по касательной к орбите и примет значение $v'_p = 7840,43 \text{ м/с}$. Тогда для энергии после импульса имеем $E'/m = \frac{(v'_p)^2}{2} - \frac{\mu}{R_3 + h_p} \approx -3,01 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}$. Так как $E'/m = -\frac{\mu}{2a'}$, то отсюда находим новую большую полуось $a' \approx 6,618 \cdot 10^6 \text{ м}$, а тогда и новую высоту апогея (помним, что перигей не меняется): $h'_a = 2a' - 2R_3 - h_p \approx 314 \text{ км}$.

Другой предельный случай — если импульс происходит при прохождении апогея. При тангенсальном импульсе в апогее не меняется величина апогея, так что $h'_a = h_a = 235 \text{ км}$. Все остальные случаи являются промежуточными.

Ответ: от 0 до 79 км.

Задача 4.

*Только тут Иван Степанович заметил,
что у безумца не один мешок, а два.
Первый закреплен на спине,
а второй в руках болтается.
Эйлин О'Коннор. 'Хранители'.
Сборник 'Вы признаны опасным'.*

Два тела сферической формы с диаметрами $D_1 = 10 \text{ км}$, и $D_2 = 8 \text{ км}$, вращаются под действием гравитационного притяжения вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Расстояние между центрами тел $L = 50 \text{ км}$, период обращения = 4 суток. Найдите плотность материала тел. Считайте распределение плотности материала в телах однородным, Гравитационная постоянная $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2} \text{ кг}^{-1}$. Влияние других сил не учитывайте.

Решение. Сила тяготения равна $F = G \frac{M_1 M_2}{L^2}$, где M_1 и M_2 — массы тел. Центр тяжести системы удовлетворяет уравнению $M_1 r_1 = M_2 r_2$, причем $r_1 + r_2 = L$. Отсюда получаем $r_1 = \frac{M_2 L}{M_1 + M_2}$, $r_2 = \frac{M_1 L}{M_1 + M_2}$. Пусть $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — угловая скорость вращения. Тогда центростремительная сила равна $M_j \omega^2 r_j$. Запишем равенство сил для первого тела:

$$M_1 \omega^2 \frac{M_2 L}{M_1 + M_2} = G \frac{M_1 M_2}{L^2} \implies T^2 = \frac{4\pi^2 L^3}{G(M_1 + M_2)}.$$

Подставляя данные задачи, находим отсюда суммарную массу $M_1 + M_2 = 6,19 \cdot 10^{14} \text{ кг}$. Поскольку распределение массы в телах однородное, то $M_j = \frac{4}{3}\pi R_j^3 \rho = \frac{\pi D_j^3 \rho}{6}$. Тогда

$$\frac{\pi \rho}{6} (D_1^3 + D_2^3) = 6,19 \cdot 10^{14},$$

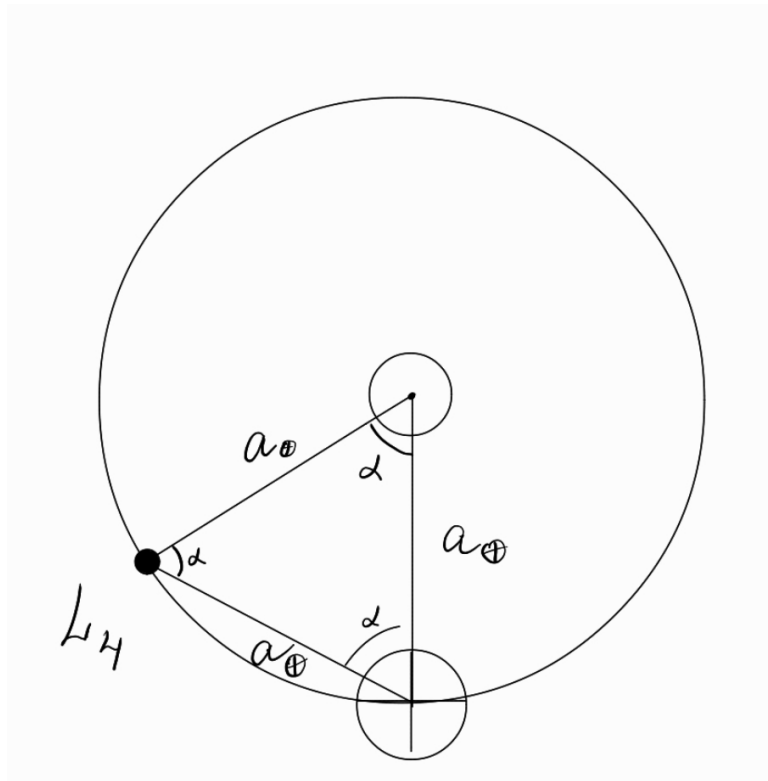
откуда находим $\rho = 783 \text{ кг/м}^3$.

Задача 5.

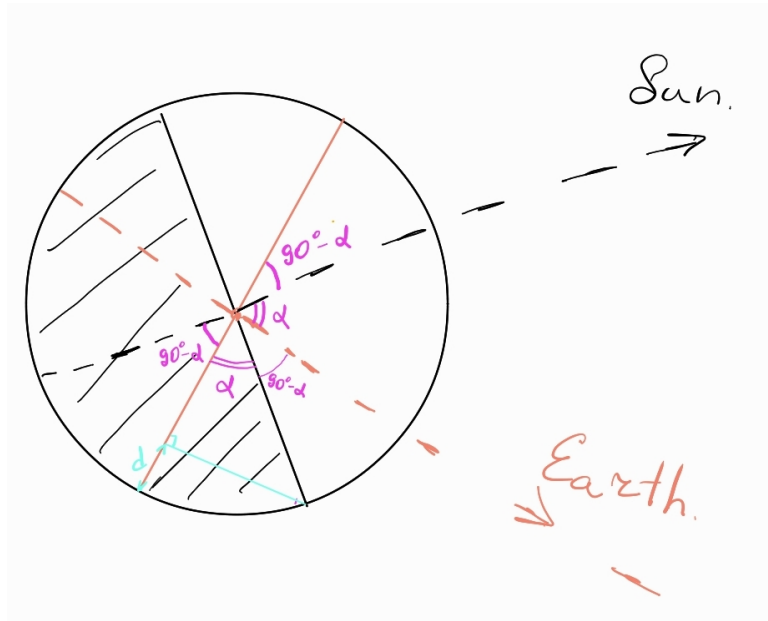
Все, что остается, — мысль о небе, том самом,
которое можно увидеть,
только стоя на вершине Эвереста.
Я пытаюсь представить его цвет — и не могу.
Эйлин О'Коннор. 'Сделка'.
Сборник 'Вы признаны опасным'.

В точке L_4 (четвертой точке Лагранжа) системы Земля — Солнце находится шарообразный астероид радиусом 250 км и альбедо равным 0,7. Наблюдатель на Земле направил телескоп с равнозрачковым увеличением на данный спутник. Найдите минимальный диаметр телескопа для того, чтобы можно было провести наблюдение данного небесного тела. Считайте, что невооруженным глазом можно увидеть звезды 6 звездной величины, а условия наблюдения идеальны. Светимость Солнца $3,86 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$. Атмосферой и абберрацией света пренебрегите.

Решение. Найдём фазу спутника



$$\Phi = \frac{d}{D} = \frac{R - (R - d)}{2R} = \frac{R - \cos(\alpha) \cdot R}{2R} = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$$



⇓

$$F = 1 - \Phi = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2} = 0,75$$

Так как спутник находится в точке L1, то расстояние $a = 1$ а.е. $\alpha = 60^\circ$. Найдем освещенность спутника (отраженный свет от Солнца) на Земле.

$$E = \frac{L_\odot}{4\pi a^2} \cdot \frac{\pi R^2 \cdot A \cdot F}{2\pi a^2} \approx 10^{-9} \text{ Вт/м}^2$$

Найдём звездную величину астероида. Для этого воспользуемся формулой Погсона:

$$m - m_\odot = 2,5 \log \frac{E_\odot}{E}$$

⇓

$$m = 2,5 \log \frac{E_\odot}{E} + m_\odot \approx 3,4^m$$

Таким образом, телескоп для наблюдения не нужен. Однако, если телескоп диаметром меньше, чем диаметр зрачка, то звезды становятся более слабыми, то есть найдем диаметр телескопа, для этого запишем формулу Погсона:

$$m_{eye} - m = -2,5 \log \frac{D^2}{d_{eye}^2}$$

⇓

$$D = \sqrt{10^{-0.4(m_{eye}-m)}} \cdot d \approx 1,8 \text{ мм}$$

Задача 6.

Он положил на стол передо мной лист бумаги,
 заполненный с одной стороны.
 Если не считать вентилятора, это было первое
 за весь наш разговор упоминание о том,
 что передо мной не совсем человек.
 Потому что взять этот лист ему было попросту неоткуда.
 Эйлин О'Коннор. 'Сделка'.
 Сборник 'Вы признаны опасным'.

Из прямоугольного листа клетчатой бумаги (M строк, N столбцов) удалили некоторые клетки. В результате лист распался на несколько кусков. Определите площадь максимального из кусков (число клеток). Две клетки не распадаются, если они имеют общую сторону.

Входные данные. В первой строке находятся числа M и N , в следующих M строках — по N символов. Если клетка не была вырезана, этому соответствует знак #, если вырезана — точка, $1 \leq M, N \leq 100$.

Выходные данные. Вывести одно число — площадь максимального куска.

Пример

Входные данные

5 10

```
# # . . # # # # # .
. # . # . # . . . .
# # # . . # # . # .
. . # # . . . . . #
. # # # . # # # # #
```

Выходные данные

11

Пояснение. Это площадь самого большого куска, содержащего клетки $(1, 1)$; $(1, 2)$; $(2, 2)$; $(3, 1)$; $(3, 2)$; $(3, 3)$; $(4, 3)$; $(4, 4)$; $(5, 2)$; $(5, 3)$ и $(5, 4)$. Остальные куски меньше — 8 клеток, 6 клеток и два куска по одной клетке.

Задача 7.

Робот Том удалялся от дома.
 На сгибе его локтя болталась ловушка для крыс.
 Робот Том вышел на край поля, присел на корточки,
 разжал скрипучие металлические пальцы.
 И выпустил маленькую серую крысу в золотую траву.
 Эйлин О'Коннор. 'Вы признаны опасным'.
 Сборник 'Вы признаны опасным'.

Лабиринт представляет собой прямоугольник N на M с непроницаемыми внешними стенами и препятствиями внутри. В лабиринте находится мышка. Одно или несколько

позиций в лабиринте имеют выход — отверстие, через которое мышка может вылезти и покинуть лабиринт. Вначале мышка находится в верхнем левом углу лабиринта. За один ход она может переместиться в любом из четырех направлений вплоть до первого препятствия или до внешней стенки лабиринта. В конце хода мышка всегда останавливается непосредственно перед этим препятствием (или внешней стенкой). Если на ее пути или в конечной позиции находится отверстие, то мышка покидает лабиринт через него. Найдите минимально число ходов, которые надо сделать, чтобы покинуть лабиринт.

Входные данные. В первой строке вводятся N и M — размеры лабиринта (целые положительные числа, не превышающие 100). Затем идет N строк по M чисел в каждой — описание лабиринта. Число 0 в описании означает свободное место, число 1 — препятствие, число 2 — отверстие.

Выведите единственное число — минимальное количество наклонов

Пример

Входные данные

```
5 5
0 0 0 0 1
0 1 1 0 2
0 0 1 0 0
0 2 1 0 0
0 0 1 0 0
```

Выходные данные

3

Пояснение. Чтобы попасть в отверстие, находящееся во второй строке, последнем столбце потребуется 4 хода: по первой строке вправо, затем по четвертому столбцу вниз, затем по последней строке вправо, и наконец, по последнему столбцу вверх. Чтобы попасть в отверстие, находящееся в четвертой строке, втором столбце, потребуется 3 хода — по первому столбцу вниз, по последней строке вправо и затем по второму столбцу вверх.

Задача 8.

— Диспозицию все помнят? — сурово осведомился я.

— Мы с Витой обходим озеро слева,
вы идете по главной дороге.

Эйлин О'Коннор. 'Патруль'.

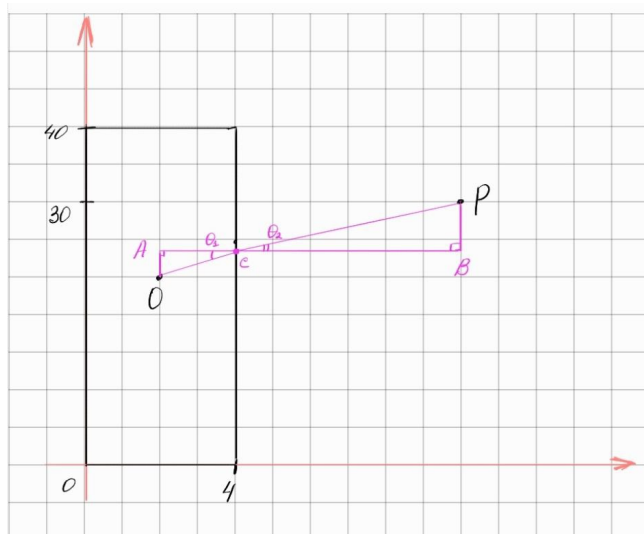
Сборник 'Вы признаны опасным'.

Озеро имеет прямоугольную форму с границей (единицы измерения — км):

$$\begin{cases} y = 0, & x \in [0, 4]; \\ y = 40, & x \in [0, 4]; \\ x = 0, & y \in [0, 40]; \\ x = 4, & y \in [0, 40]; \end{cases}$$

Спускаемый модуль упал в геометрическом центре озера, а космонавту нужно добраться до точки с координатами (6, 30). После некоторого раздумья космонавт понял, что вначале ему придется плыть по озеру, а затем идти по суше. Центр управления полетом (ЦУП отлично знает, с какой скоростью плавает каждый космонавт и с какой ходит) передал космонавту инструкцию — чтобы добраться до цели за наименьшее время, надо плыть к точке (4, 22). С какой скоростью плавает космонавт, если скорость его ходьбы по суше равна 3 км/ч?

Решение: Построим схематично озеро. Для начала определим координату центра озера.



Очевидно, что центр находится в точке $O(2, 20)$

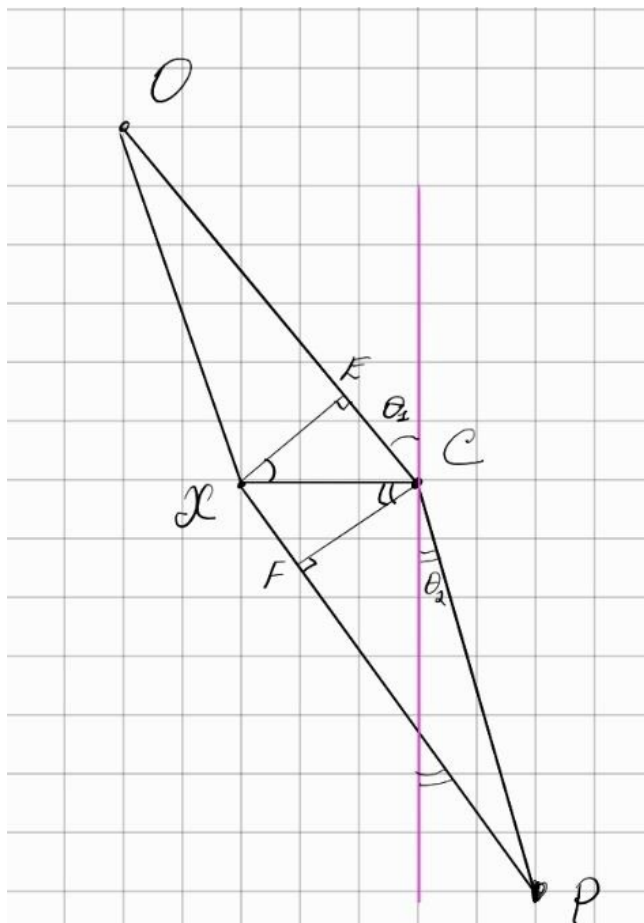
Найдем отношение скоростей (выведем аналогию закона Снеллиуса). Отметим точки E, F (получены по аналогии с "фронтом волны"). Получим два равнобедренных треугольника OXE, PFC . Отсюда,

$$\begin{cases} EC = XC \cdot \sin \theta_1; \\ XF = XC \cdot \sin \theta_2; \end{cases}$$

\Downarrow

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

Найдём углы θ_1, θ_2 :



$$\begin{cases} \sin \theta_1 = \frac{OA}{\sqrt{AC^2 + AO^2}} = \frac{2}{\sqrt{4+4}} \approx 0.71; \\ \sin \theta_2 = \frac{PB}{\sqrt{BC^2 + PB^2}} = \frac{8}{\sqrt{64+36}} \approx 0.97; \end{cases}$$

Значит,

$$v_1 = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \cdot v_2 \approx 2.2 \text{ c}^{-1}$$

Ответ: $v_1 \approx 2.2 \text{ c}^{-1}$